

2012年 東大数学 文系第3問 理系第2問

図を偶奇によって塗りかた



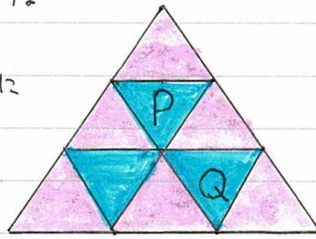
は n が奇数のときは

球がとどまる部屋



は n が偶数のときは

球がとどまる部屋 である



n 秒後に Q の部屋にある確率を p_n とする

n が奇数のときは、 n 秒後に Q の部屋には球がない

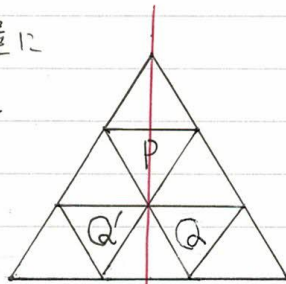
ので $p_n = 0$

以下、 n は偶数とする。

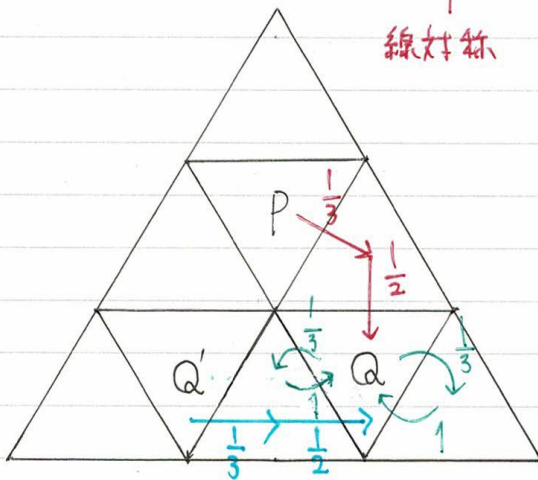
図の対称性から、 Q' の部屋に

n 秒後にある確率を p'_n とする。

$p'_n = p_n$



線対称



n 秒後に Q にいるためには、 $n-2$ 秒後に

P, Q, Q' にいる必要がある。

それぞれの点から Q に移動するには、

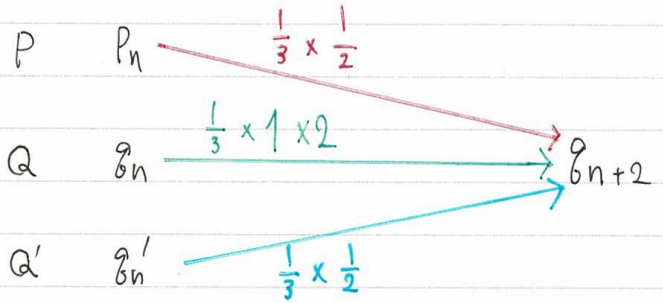
上の図の赤青緑の3通りがある

(緑は、2通り)

遷移図を描く

n 秒後

$n+2$ 秒後



$$\begin{aligned}
 \text{よって、} p_{n+2} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times p_n + \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times p_n + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times p'_n \\
 &= \frac{1}{6} p_n + \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6} p'_n
 \end{aligned}$$

n が偶数のときは、 P, Q, Q' の部屋のそれぞれに1個の球が

$$p_n + p_n + p'_n = 1$$

$$p'_n = p_n \quad \text{の2本を代入して}$$

$$\begin{aligned}
 p_{2m+2} &= \frac{1}{6} (1 - 2p_{2m}) + \frac{2}{3} p_{2m} + \frac{1}{6} p_{2m} \\
 &= \frac{1}{2} p_{2m} + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

n と $n+2$ の関係がとわかりづいので工夫

$$n = 2m \text{ とすると、} p_{2m+2} = \frac{1}{2} p_{2m} + \frac{1}{6}$$

$$p_{2m} = q_m \text{ とおくと、} q_{m+1} = \frac{1}{2} q_m + \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
 \text{この漸化式を解いて、} q_m &= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \frac{1}{3} \\
 (\text{但し、} q_1 = p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6})
 \end{aligned}$$

$$p_{2m} = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \frac{1}{3}$$

$$m = \frac{n}{2} \text{ を代入}$$

$$p_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \right\}$$

$$n \text{ が奇数のときは } 0, \quad n \text{ が偶数のときは } \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \right\}$$